Reglersynthese nach dem Frequenzkennlinienverfahren

REGELUNGSTECHNIK

ausgeführt am

FACHHOCHSCHUL-STUDIENGÄNGE DER WIRTSCHAFT

Fachhochschul-Studiengang
„Automatisierungstechnik“ für Berufstätige

von

Christian Krachler

Graz, im April 04

INHALTSVERZEICHNIS

1 DAS BODEDIAGRAMM

Als Bode-Diagramm bezeichnet man die getrennte Darstellung des Logarithmus des Amplitudenverhältnisses |G(jω)| und des Phasenwinkels φ(ω) in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω. Dabei wird halblogarithmisches Einteilung verwendet, und die Frequenz wegen der Größe der auftretenden Werte auf der logarithmischen Skala aufgetragen. Nach Aufspaltung des Frequenzganges in Real- und Imaginärteil lassen sich Amplitudenverhältnisse und Phasenwinkel bestimmen.

Bode-Diagramme eignen sich besonders zur Frequenzgangdarstellung von Reihenschaltungen einzelner Übertragungsglieder. Für alle Einzelübertragungssysteme lassen sich Amplituden- und Phasenverlauf in halb-logarithmisches Papier einzeichnen. Die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich als Addition der einzelnen Übertragungsfunktionen.

Der Frequenzgang G(jω) ergibt sich aus der Übertragungsfunktion G(s), unter der Berücksichtigung

s = jω+ σ

σ = 0 → s = jω

Die Übertragungsfunktion G(s) ist mehr eine abstrakte, nicht messbare Beschreibung eines Systems, während der Frequenzgang G(jω) unmittelbar physikalisch interpretiert und auch gemessen werden kann. Dazu wird der Fequenzgang als komplexe Größe mit Imaginärteil und Realteil dargestellt.

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}[G(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[G(j\omega)] = \frac{Xa(j\omega)}{Xe(j\omega)} \qquad .... \quad \frac{Ausgangssignal}{Eingangssignal}$$

$$G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Wobei das Eingangssignal im Zeitbereich eine Sinusfunktion ist:

$$x(t) = \hat{x}\sin(\omega t)$$

Der gesamte Frequenzgang G(jω) für alle Frequenzen von ω = 0 bis ω→∞ beschreibt ähnlich wie die Übertragungsfunktion G(s) oder die Übergangsfunktion h(t) das Übertragungsverhalten eines linearen zeitinvarianten kontinuierlichen Systems vollständig.

Zwischen Zeit- und Frequenzbereich bestehen folgende Zusammenhänge:

Mit Hilfe der Grenzwertsätze der Laplace-Transformation ermittelt man die beiden wichtigen Beziehungen zwischen der Übertragungsfunktion G(s) bzw. dem zugehörigen Frequenzgang G(jω) und der Übergangsfunktion h(t).

$$\lim_{t\to 0+} h(t) = \lim_{s\to\infty} sH(s) = \lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{j\omega\to\infty} G(j\omega)$$
$$\lim_{t\to \infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{j\omega\to 0} G(j\omega)$$
$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{s} G(s)$$

Voraussetzung für die Anwendung dieser Grenzwertsätze ist allerdings die Existenz der entsprechenden Grenzwerte im Zeitbereich.

Beim Bodediagramm wird der Frequenzgang in zwei Bestandteile, nämlich den Betrag und die Phase aufgeteilt. Stellt man diese beiden Funktionen in geeigneter Weise über der f- bzw. ω -Achse als Kurven dar, so erhält man die Betragskennlinie (Amplitudengang) und die Phasenkennlinie (Phasengang), die gemeinsam als Frequenzkennlinie (oder Bode-Diagramm) bezeichnet werden.

Dabei wird die Betragskennlinie im dekadischen Logarithmus dargestellt. Dieser "Kunstgriff" führt zu einfachen und leicht handzuhabenden Betragskennlinien wie auch das folgende Beispiel zeigen soll. Es ist üblich, log |G| noch mit dem Maßstabsfaktor 20 zu versehen und in dB auszudrücken.

- Amplitude: $A_{dB} = 20 \cdot \log\left(\sqrt{\mathrm{Re}[G(j\omega)]^2 + \mathrm{Im}[G(j\omega)]^2}\right)$
- Phase: $\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega)]}\right)$

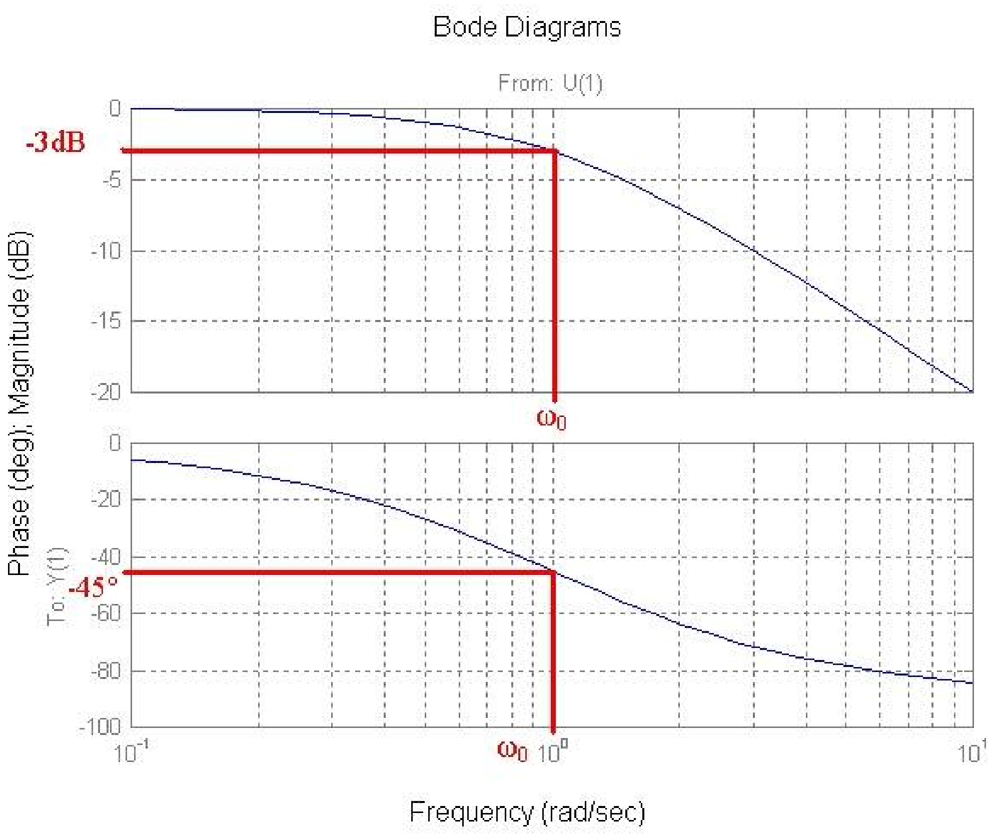


Abb.1 Beispiel eines Bodediagramms

Erklärung der Begriffe:

$\omega=\omega_0$: Grenzfrequenz, Eck- oder Knickfrequenz

Grenzfrequenz bei einer Abschwächung von -3dB

Beispiel eines Bodediagramms:

Anhand des Beispiels eines PT_1-Gliedes (Verzögerungsglied 1.Ordnung) soll das Bodediagramm veranschaulicht werden:

Das PT_1-Glied ist in diesem Beispiel als RC-Tiefpass aufgebaut:

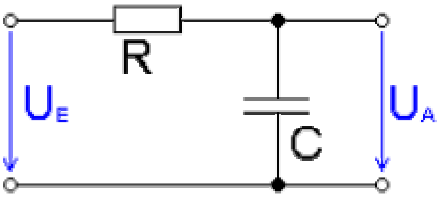


Abb.2 RC-Tiefpass

Herleitung der Übertragungsfunktion:

$$\frac{U_E(s)}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{U_A(s)}{\frac{1}{sC}}$$

$$\frac{U_A(s)}{U_E(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{1+RCs}$$

Die Übertragungsfunktion eines PT_1-Gliedes lautet allgemein:

$$G(s)=\frac{K_R}{1+sT}$$

Bestimmen von K_R und T:

$$K_R = 1$$
$$T = R \cdot C$$

$$\frac{K_R}{1+sT} = \frac{K_R}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}}$$
$$\Rightarrow \qquad T = \frac{1}{\omega_0}$$

Die Übertragungsfunktion eines PT_1-Gliedes ergibt folgendes Bodediagramm (K_R=1 und T=1):

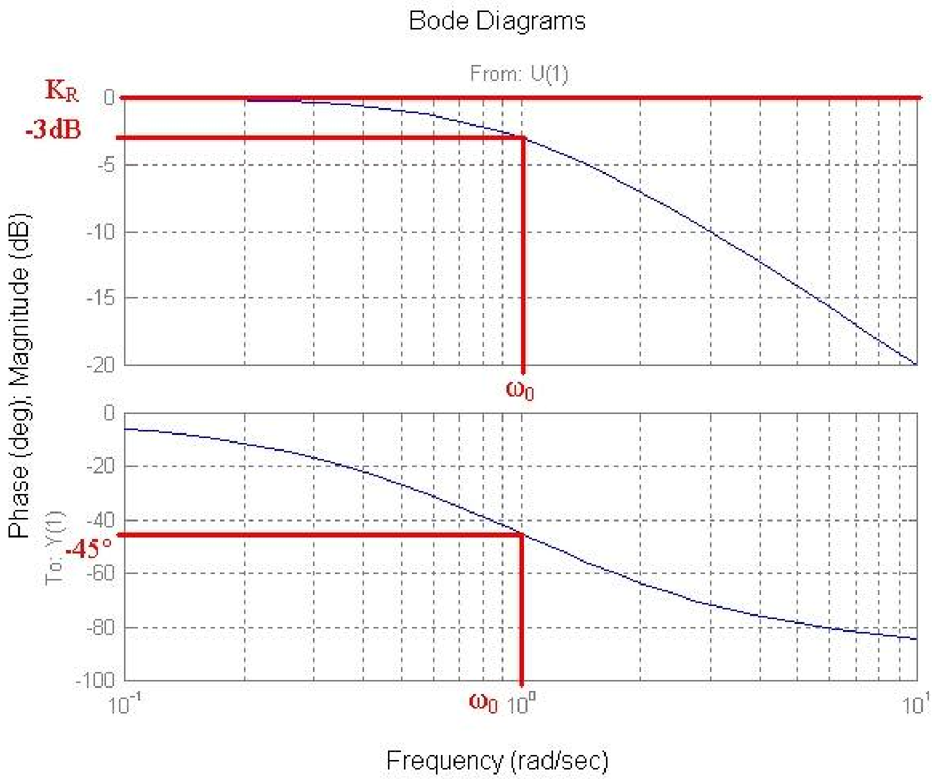


Abb.3 Bodediagramm eines RC-Tiefpasses

Durch Anpassung der Parameter K_R und T kann man den Verlauf der Kurven ändern.

2 RECHNEN MIT DEM BODEDIAGRAMM

Bodediagramme bilden Systeme im Bildbereich ab. Verknüpfungen von Systemen können einfach berechnet werden.

Schaltung	**Zeitbereich**		**Frequenzbereich**
Hintereinanderschaltung	Faltung	→	Multiplikation
$\rightarrow \boxed{G_1(s)} \rightarrow \boxed{G_2(s)} \rightarrow$	$g(t) = g_1(t) * g_2(t)$	→	$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$

Frequenzbereich		**Bode-Diagramm**
Multiplikation	→	Addition
$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$	→	$A_{dB}(j\omega) = A_{1dB}(j\omega) + A_{2dB}(j\omega)$ $\varphi(j\omega) = \varphi_1(j\omega) + \varphi_2(j\omega)$

Der Gesamtfrequenzgang einer Hintereinanderschaltung folgt somit durch Addition der einzelnen Frequenzkennlinien. Das ist durch die logarithmische Darstellung des Frequenzganges möglich.

Wegen der gewählten doppellogarithmischen Darstellung bzw. einfachlogarithmischen Maßstäbe für A(ω) bzw. φ(ω) lässt sich näherungsweise der Verlauf von A(ω) durch Geradenabschnitte und φ(ω) in Form einer Treppenkurve darstellen. Diese „Näherungsgeraden" ermöglichen durch einfache geometrische Konstruktionen die Analyse und Synthese von Regelsystemen. Sie stellen ein sehr wichtiges Hilfsmittel für den Regelungstechniker dar.

Beispiel der Berechnung eines Bodediagramms:

I-Glied:

z.B.: $T_I = 3s$

Das I-Glied hat folgende Übertragungsfunktion:

$$G_I(s) = \frac{1}{sT_I} = \frac{1}{s \cdot 3s}$$

Die Durchtrittsfrequenz ergibt sich aus:

$$\omega_I = \frac{1}{T_I} = \frac{1}{3s} = 0{,}\dot{3}s^{-1}$$

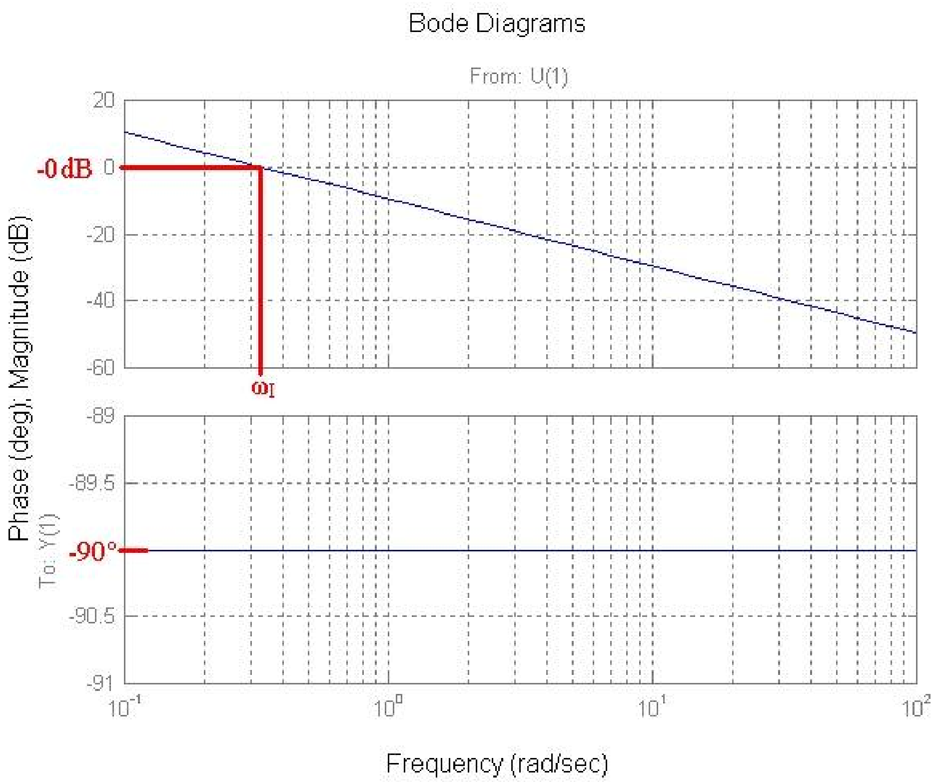


Abb.4 Bodediagramm eines I-Gliedes

PD-Glied:

z.B.: $T_I = 0{,}75s$

$K_R = 4 = 20 \log(4) = 12dB$

Das PD-Glied hat folgende Übertragungsfunktion:

$$G_{PD}(s) = K_R \cdot (1 + T_D \cdot s) = K_R + K_R \cdot T_D \cdot s = 4 + s \cdot 3s$$

Die Grenzfrequenz ergibt sich aus

$$\omega_D = \frac{1}{T_D} = \frac{4}{3} s^{-1}$$

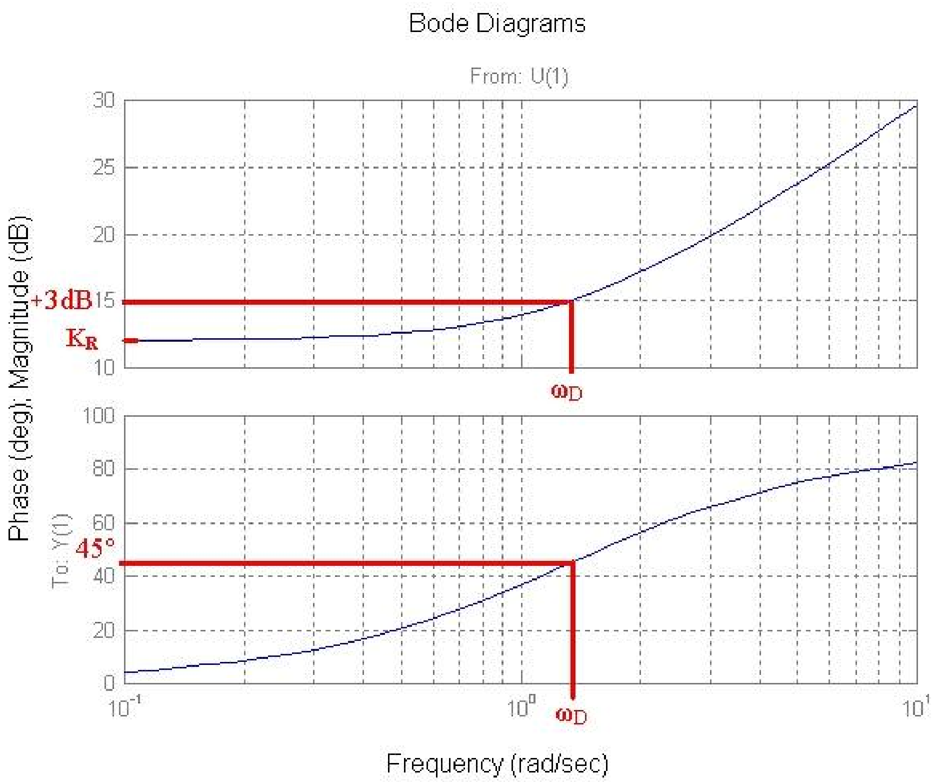


Abb.5 Bodediagramm eines PD-Gliedes

Addition der Übertragungsfunktionen:

Nun werden das I-Glied und das PD-Glied hintereinander geschaltet. Die Gesamtübertragungsfunktion ist das Produkt der einzelnen Systeme.

$$G(s) = G_{PD}(s) \cdot G_I(s)$$

$$G(s) = \frac{K_R \cdot (1 + sT_D)}{sT_I}$$

Im Bodediagramm ergibt sich die Gesamtübertragungsfunktion aus der Addition der einzelnen Übertragungsfunktionen.

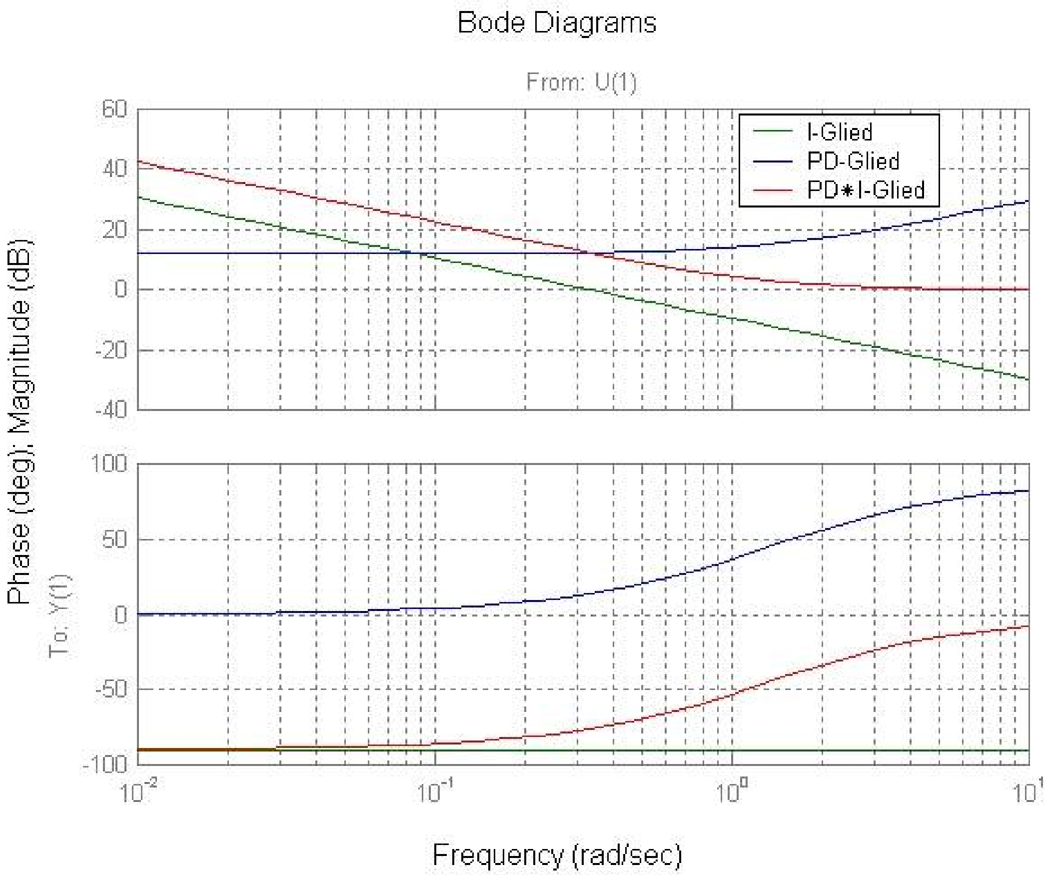


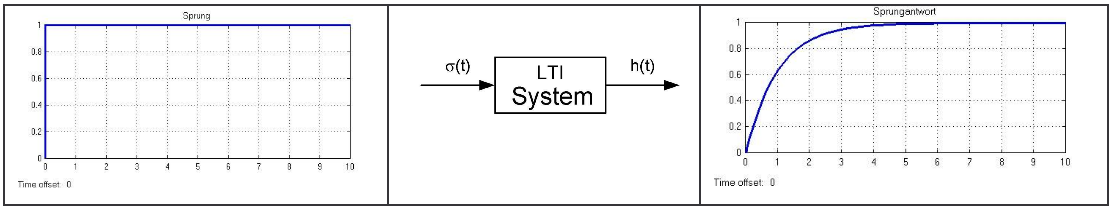
Abb.6 Summierung im Bodediagramm

3 ANALYSE VON BESTEHENDEN REGLERN

Für die Analyse von Reglern gibt es 2 Möglichkeiten:

➔ Die Analyse des Systems erfolgt durch das Anlegen eines definierten Eingangssignals (Sprung, Dirac, Sinusschwingung). Durch Messung des Ausgangssignals (z.B. Sprungantwort) und durch eine Fourier-Analyse des Eingangs- und Ausgangssignals kann man die Übertragungsfunktion und das Modell bilden.
Dieses Verfahren wird eingesetzt, wenn der Aufbau des Systems nicht bekannt ist (Black-Box).

Als Eingangssignale für die Analyse werden gewöhnlich Sprung und Impuls verwendet. Auch durch das Anlegen von Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen kann man ein System analysieren. Jedoch ist diese Form der Analyse aufwendiger, da man je nach gewünschter Genauigkeit des Ergebnisses entsprechend viele Ausgangssignale auswerten muss.



In diesem Beispiel handelt es sich um ein PT1-Glied, das mit einem Sprung analysiert wird.

➔ Aufgrund des Aufbaus und physikalischer Gesetze ergibt sich ein mathematisches Modell des Systems (z. B. Differential- und Differenzengleichungen). Eine Modellvereinfachung (z. B. Linearisierung) gehört als ganz wesentlicher Bestandteil zur Modellbildung hinzu.
Dieses Verfahren wird eingesetzt, wenn der Aufbau des Reglers bekannt ist (Schaltplan bzw. Konstruktionsplan vorhanden).

4 KENNDATEN EINES GESCHLOSSENEN REGELKREISES

4.1 Kenndaten des geschlossenen Regelkreises im Frequenzbereich und deren Zusammenhang mit den Gütemaßen im Zeitbereich

Eigenschafen im Frequenzbereich:

Ein Regelkreis besitzt gewöhnlich einen Frequenzgang G(jω) mit einer Amplitudenüberhöhung, der sich qualitativ im Bode-Diagramm darstellen lässt. Zur Beschreibung dieses Verhaltens eignen sich die folgenden Kenndaten:

- Resonanzfrequenz ω_0
- Amplitudenüberhöhung $A(\omega)_{max\,dB}$
- Bandbreite ω_{b1}
- Phasenwinkel $\varphi_b = \varphi(\omega_b)$

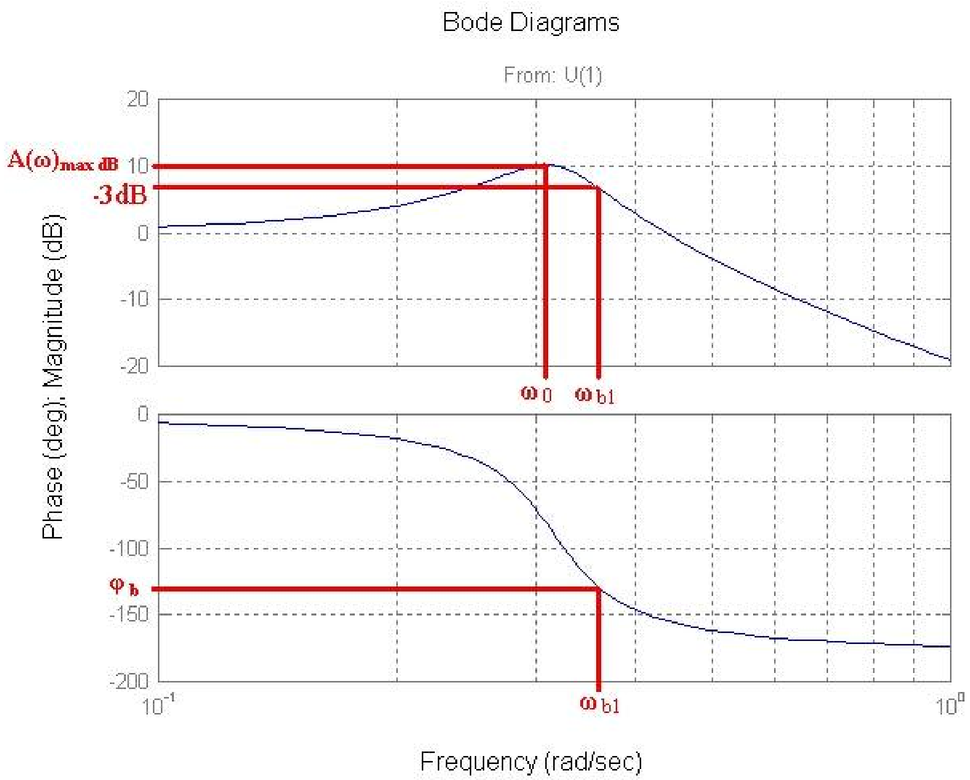


Abb.7 Eigenschaften im Frequenzbereich

Eigenschaften im Zeitbereich:

Im Zeitbereich sind die maximale Überschwingweite e_{max} und die Anstiegszeit $T_{a,50}$ wichtige Kenndaten:

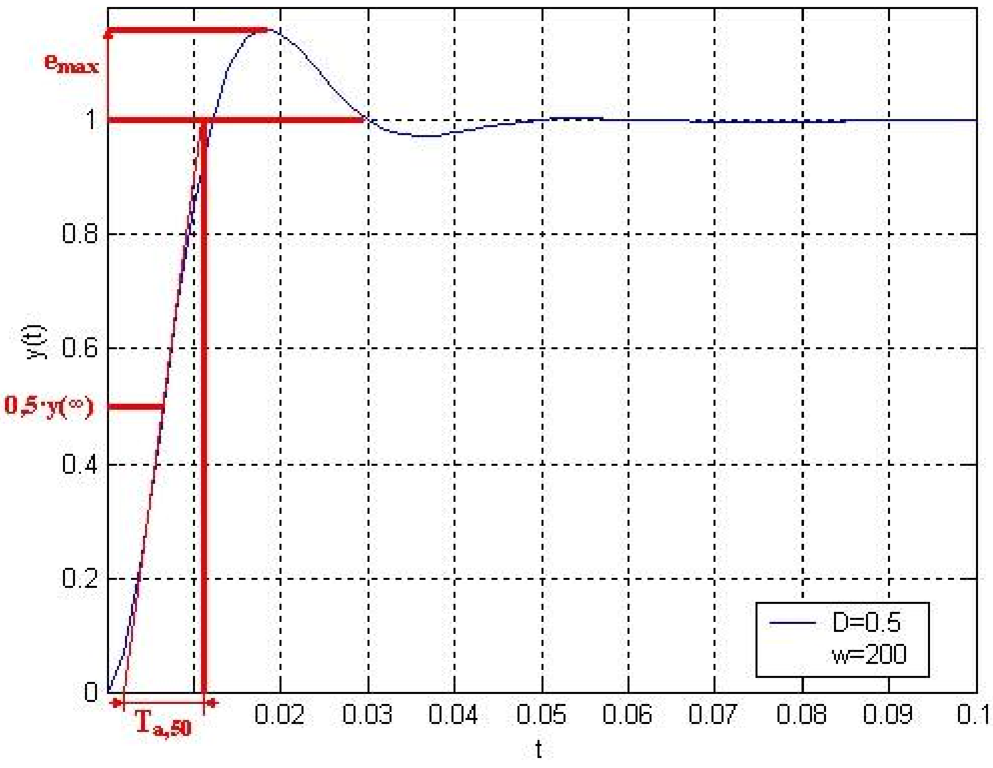


Abb.8 Eigenschaften im Zeitbereich

- **Maximale Überschwingweite**
  Die Maximale Überschwingweite ist die maximale Regelabweichung. Sie wird zumeist in Prozent des Endwertes angegeben.

$$e_{\max} = e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}}$$

Die Maximale Überschwingweite ist eine Funktion der Dämpfung D.

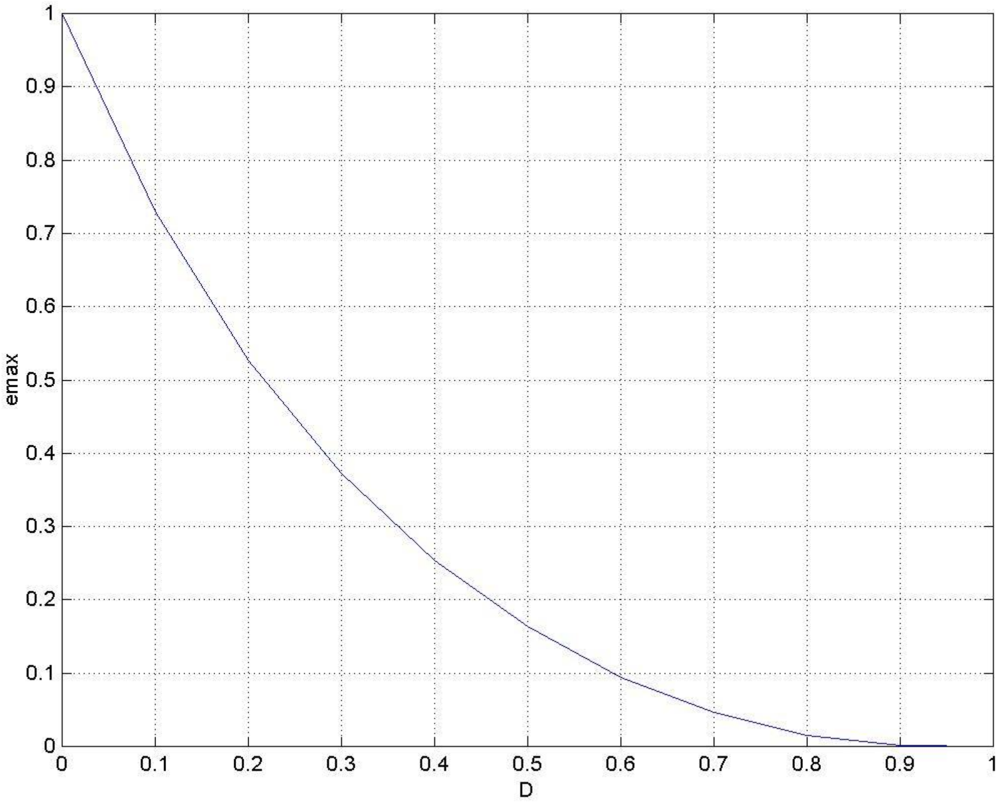


Abb.9 Maximale Überschwingweite

- **Anstiegszeit $T_{a,50}$**

  Sie ist definiert als die Zeit die benötigt wird, um von 0.1 y(t=∞) auf 0.9 y(t=∞) zu gelangen. y(t=∞) ist das Ausgangssignal im eingeschwungenen Zustand.

$$\omega_0 \cdot T_{a,50} = \frac{\sqrt{1-D^2}}{\omega_0^{-D\omega_0 t_{50}} \sin(\sqrt{1-D^2}\,\omega_0 t_{50})} e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}} = \frac{\sqrt{1-D^2}}{\omega_0^{-D\omega_0 t_{50}} \sin(\sqrt{1-D^2}\,\omega_0 t_{50})} \cdot e_{\max}$$

wobei t_{50} die Zeit ist, bei der 50% des stationären Wertes erreicht sind. ω_0 ist die Resonanzfrequenz. Das Produkt $\omega_0 * t_{50}$ ist eine Funktion der Dämpfung.

→ Die Anstiegszeit ist eine Funktion der Dämpfung.

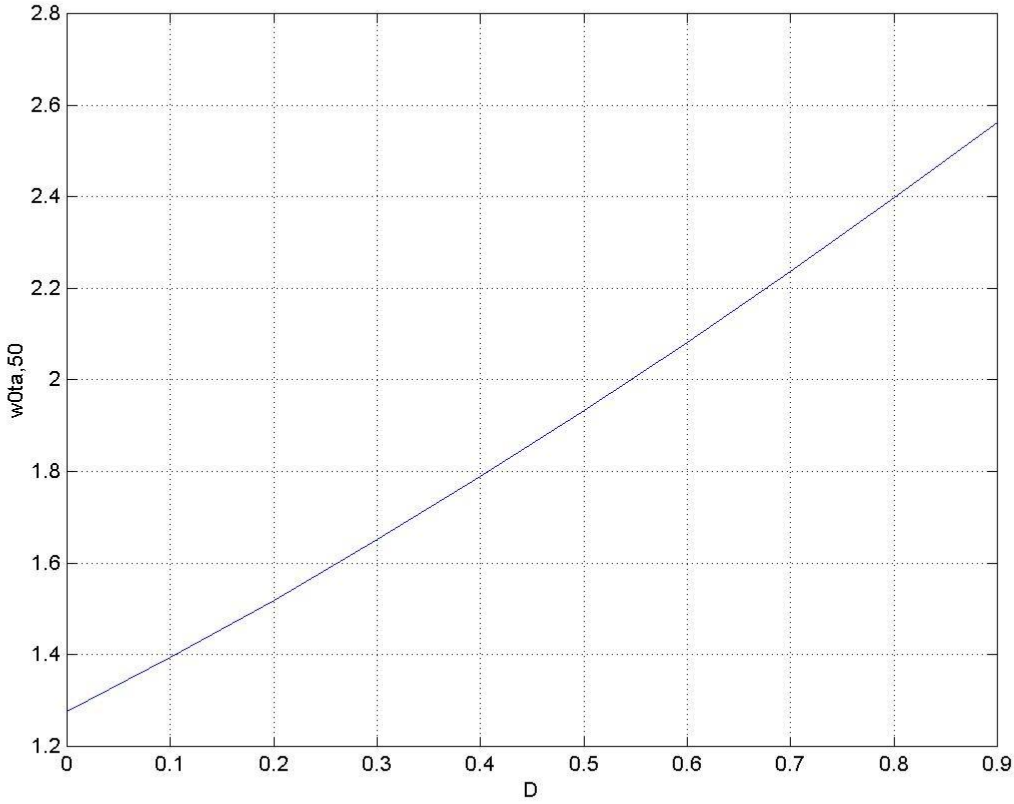


Abb.10 Anstiegszeit

4.2 Kenndaten des offenen Regelkreises im Frequenzbereich und deren Zusammenhang mit den Gütemaßen des geschlossenen Regelkreises im Zeitbereich

Ein Regelkreis besitzt ein Verzögerungsverhalten und zur Beschreibung des Frequenzganges G(jω) werden folgende Kenndaten verwendet:

- Durchtrittsfrequenz ω_D
- Phasenrand (oder Phasenreserve) $\varphi_R = 180 + \varphi(\omega_D) = \arctan(2D \cdot \frac{\omega_0}{\omega_D})$ bei $A_{R\,dB} = 0$

  Der Phasenrand ist eine Funktion von Dämpfung und Durchtrittsfrequenz

- Amplitudenrand (oder Amplitudenreserve) $A_{R\,dB} = |G_0(\omega)|_{dB}$ bei $\varphi = 180°$

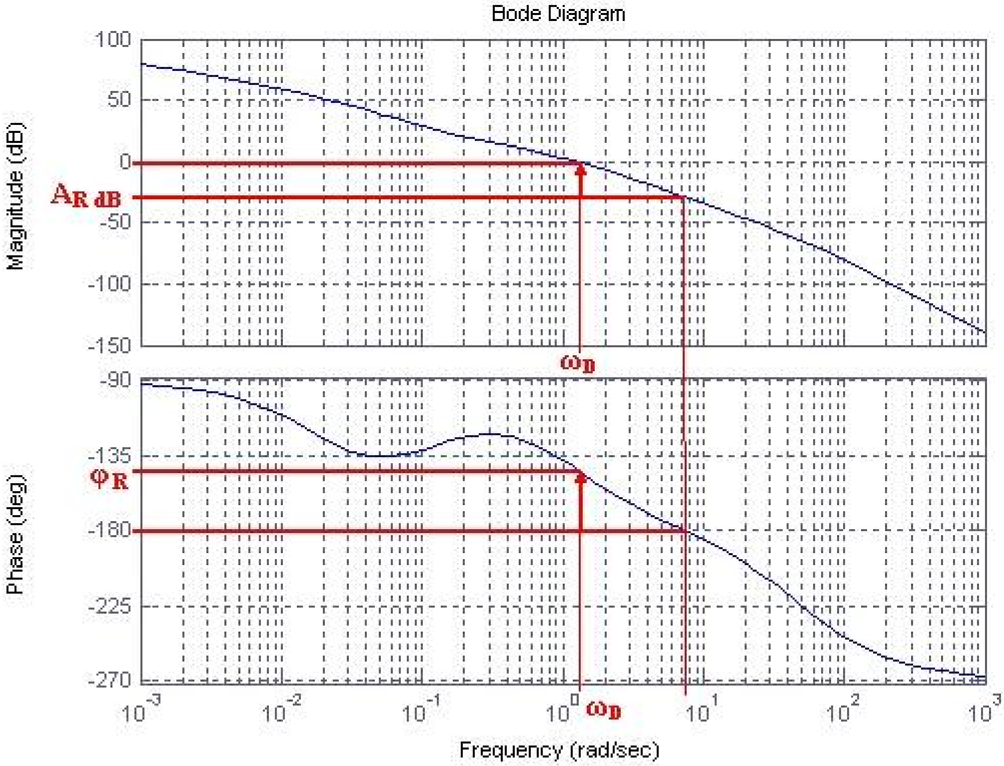


Abb.11 Beispiel eines Bodediagramms

Amplitudenrand und Phasenrand sind Stabilitätskriterien. Je größer Amplitudenrand und Phasenrand sind, desto stabiler ist das System. Wenn beide gegen 0 gehen, beginnt ein rückgekoppeltes System zu schwingen, da die Führungsgröße um 360° phasenverschoben (in Phase) und ungedämpft oder verstärkt an den Eingang des Reglers zurückgeführt wird.
Amplitudenrand und Phasenrand sind abhängig von der Durchtrittsfrequenz und der Dämpfung.

Zusammenhang von Zeit und Frequenzbereich:

- Phasenrand und maximale Überschwingweite sind begrenzt:

  $$\varphi_R[°] + e_{max}[\%] \approx 70$$

  Ein schnelles Ausregeln von Änderungen der Führungsgröße oder Störgröße und die Stabilität des Systems beeinflussen sich gegenseitig, da das Überschwingen im Zeitbereich unmittelbar mit der Phasenreserve im Frequenzbereich zusammenhängt.

  Amplitudenrand und Anstiegszeit hängen voneinander ab. Je kürzer die Anstiegszeit ist desto höher ist die maximale Überschwingweite und desto geringer ist auch der Amplitudenrand. In der Praxis wird oft auch der Zusammenhang von Durchtrittsfrequenz und Anstiegszeit verwendet:

  $$\omega_D = \frac{1}{T_{a,50}} \cdot (1{,}5 - \frac{e_{max}[\%]}{250})$$

4.2.1 Beispiel der Übertragungsfunktion eines geschlossenen Regelkreises

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit PT_2-Verhalten

$$\mathrm{G_W(s)} = \frac{\omega_0^{\,2}}{\mathrm{s}^2 + 2\cdot D\cdot \omega_0^{\,2}\cdot s + \omega_0^{\,2}}$$

ist der Ausgangspunkt.

Die dazugehörende Sprungantwort lautet:

$$\mathrm{H_W(s)} = \frac{\omega_0^{\,2}}{\mathrm{s}^2 + 2\cdot D\cdot \omega_0^{\,2}\cdot s + \omega_0^{\,2}}\cdot\frac{1}{s}$$

Es gibt nun drei Möglichkeiten um die Übergangsfunktion im Zeitbereich hw(t) zu bestimmen:

- Händisch berechnen:
  Schritt 1: Partialbruchzerlegung:

$$\mathrm{H_W(s)} = -\frac{s + D\cdot\omega_0}{(\mathrm{s}+D\cdot\omega_0)^2 - \omega_0^{\,2}(1-D^2)} - \frac{D\cdot\omega_0}{(\mathrm{s}+D\cdot\omega_0)^2 - \omega_0^{\,2}(1-D^2)} - \frac{1}{\mathrm{s}}$$

  Schritt 2: Inverse Laplace-Transformation:

$$\mathrm{h_W(t)} = \left\{1 - e^{-D\cdot\omega\cdot t}\cdot\left[\cos(\omega\cdot\sqrt{1-D^2}\cdot t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\cdot\sin(\omega\cdot\sqrt{1-D^2}\cdot t)\right]\right\}\cdot\delta(t)$$

  Ergebnis: siehe Übungen

- In Matlab Invers Laplace Transformieren:

  Ergebnis: siehe Übungen

- Simulink durch Einsetzen der Transfer Function:
  Dazu müssen die Grenzfrequenz (w=100) und die Dämpfung (D=0.7) in Matlab gesetzt werden

  Ergebnis: siehe Übungen

Alle drei Möglichkeiten liefern das gleiche Ergebnis, wobei die in Simulink durchgeführte die einfachste ist.

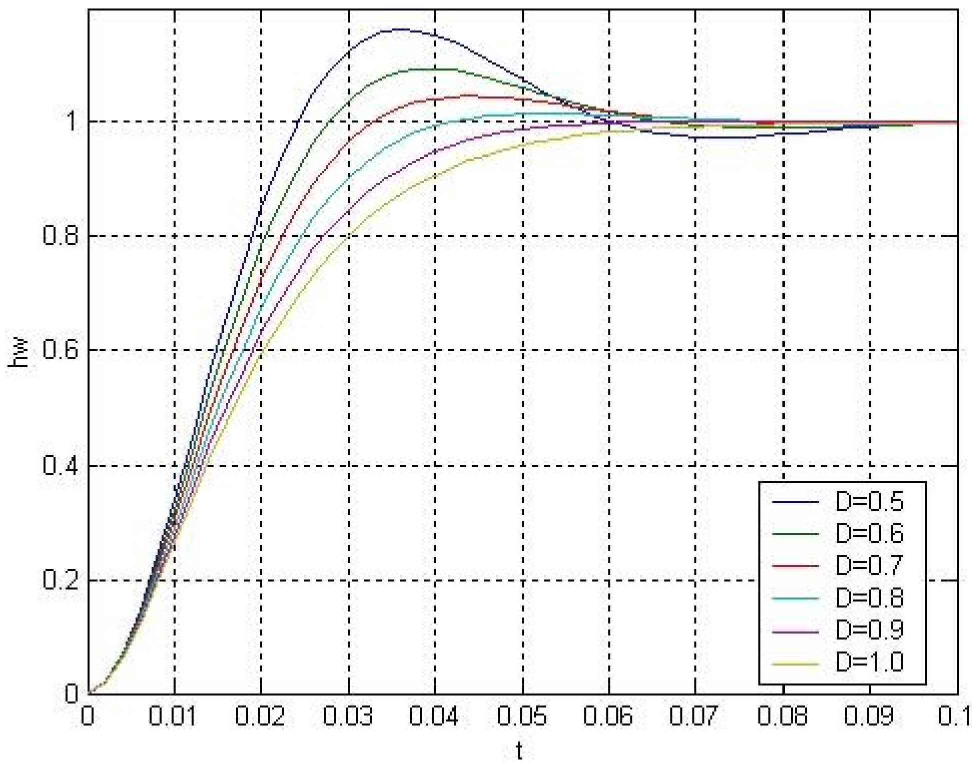


Abb.12 Übergangsfunktion hw(t) des geschlossenen Regelkreises mit PT_2-Verhalten

5 ANALYSE VON GESCHLOSSENEN REGELKREISEN

Die Analyse eines Regelkreises erfolgt über den offenen Regelkreis.

Die allgemeine Form der Führungsübertragungsfunktion von geschlossenen Regelkreisen lautet:

$$G_W(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)}$$

Im ersten Schritt wird die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $G_0(s)$ ermittelt:

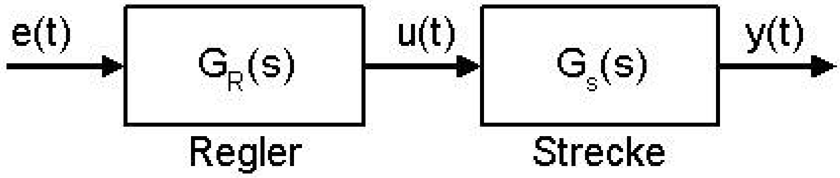


Abb.13 Offener Regelkreis

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

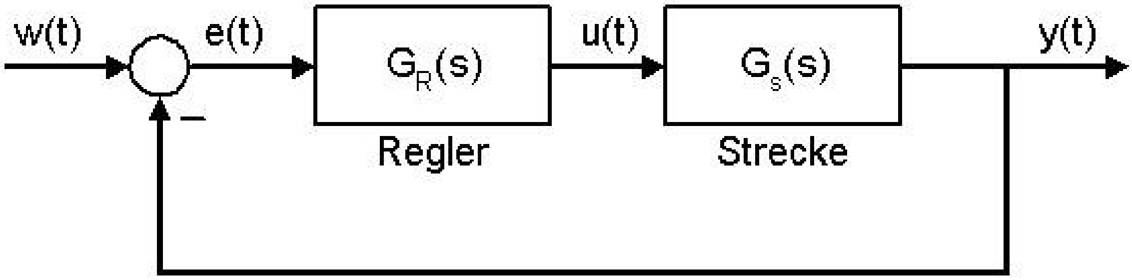


Abb.14 Geschlossener Regelkreis

Mit der Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises:

$$G_W(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)}$$

ergibt sich:

$$G_W(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

6 REGLERSYNTHESE NACH DEM FREQUENZKENNLINIENVERFAHREN

Für Systeme mit einem dominanten Poolpaar gibt es ein Syntheseverfahren im Frequenzbereich. Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist die Darstellung des Frequenzganges $G_O(j\omega)$ des offenen Regelkreises im Bode-Diagramm.
Die zu erfüllenden Spezifikationen des geschlossenen Regelkreises werden durch die Kenndaten des offenen Regelkreises formuliert. Die eigentliche Syntheseaufgabe besteht dann darin, durch Wahl einer geeigneten Reglerübertragungsfunktion $G_R(s)$ den Frequenzgang des offenen Regelkreises so zu verändern, dass er die geforderten Kenndaten erfüllt.

Beim Frequenzkennlinienverfahren werden Amplituden- und Phasengang unter Hinzufügen von Korrekturgliedern für jeden Schritt gezeichnet, die entsprechenden Entwurfsparameter bestimmt und mit den gegebenen Spezifikationen verglichen. Diese Spezifikationen werden im Allgemeinen in Form von Phasenrand und Durchtrittsfrequenz zur Charakterisierung des Übertragungsverhaltens und in der Form der Verstärkung zur Charakterisierung des bleibenden Regelfehlers beschrieben. Im Folgenden werden die drei Möglichkeiten zur Anpassung und deren Darstellung im Bode-Diagramm behandelt:

- Verstärkungsglied
- Phasenanhebendes Glied (Lead)
- Phasenabsenkendes Glied (Lag)

Gegeben ist folgende Regelstrecke:

$$G_S(s) = \frac{1}{s \cdot (1+s) \cdot (1+\frac{s}{3})}$$

Folgende Vorgaben sollen erfüllt werden:

Anstiegszeit: $T_{a,50} = 0.7s$

Überschwingweite: $e_{max} = 25\ \%$

Bei rampenförmigem Eingangssignal $w(t) = w_1 * \sigma(t) * t$

soll der geschlossene Regelkreis die bleibende Regelabweichung $e_\infty = \frac{1}{20}$ besitzen.

6.1 Schritt 1 - Ermittlung von Durchtrittsfrequenz, Phasenreserve und Kreisverstärkung

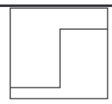
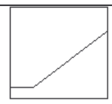
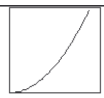
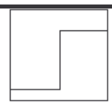
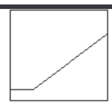
Im Allgemeinen sind bei einer Syntheseaufgabe die Kenndaten für das Zeitverhalten des geschlossenen Regelkreises, also die maximale Überschwingweite e_{max}, die Anstiegszeit $T_{a,50}$ und die bleibende Regelabweichung e_∞ vorgegeben.
Aufgrund dieser Werte werden folgende Werte des offenen Regelkreises berechnet:

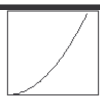
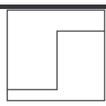
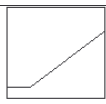
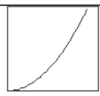
- Durchtrittsfrequenz:
  Die Durchtrittsfrequenz wird nur näherungsweise bestimmt.
  $$\omega_D \approx \frac{1}{T_{a,50}} \cdot (1{,}5 - \frac{e_{\max}[\%]}{250}) = \frac{1}{0{,}7} \cdot (1{,}5 - 0{,}1) \approx 2s^{-1}$$

- Phasenrand:
  $$\varphi_R[°] + e_{\max}[\%] \approx 70 \Rightarrow \varphi_R[°] \approx 70 - e_{\max}[\%] = 45°$$

- Verstärkungsfaktor:
  $$K_0 = K_r \cdot K_s = 20$$

  Der Verstärkungsfaktor K_0 wird anhand nachstehender Tabelle ermittelt. Aufgrund der bleibenden Regelabweichung für verschiedene Systemtypen wird der Verstärkungsfaktor bestimmt.

Systemtyp von $G_0(s)$	Eingangsgröße $X_e(s)$			Bleibende Regelabweichung e_∞
k=0 (verzögertes P-Verhalten)	Sprung	$\frac{x_{e_0}}{s}$		$\frac{1}{1+K_0} x_{e_0}$
	Rampe	$\frac{x_{e_1}}{s^2}$		∞
	Parabel	$\frac{x_{e_2}}{s^3}$		∞
k=1 (verzögertes I-Verhalten)	Sprung	$\frac{x_{e_0}}{s}$		0
	Rampe	$\frac{x_{e_1}}{s^2}$		$\boxed{\frac{1}{K_0} x_{e_1}}$
				∞

	Parabel	$\frac{x_{e_2}}{s^3}$		
k=2 (verzögertes I_2-Verhalten)	Sprung	$\frac{x_{e_0}}{s}$		0
	Rampe	$\frac{x_{e_1}}{s^2}$		0
	Parabel	$\frac{x_{e_2}}{s^3}$		$\frac{1}{K_0} x_{e_2}$

6.1.1 Lösung: Bestimmen der Kreisverstärkung

Für dieses System soll für ein rampenförmiges Eingangssignal eine bleibende Regelabweichung e_∞ entstehen.

Daraus wird der Systemtyp

k = 1 (verzögertes I-Verhalten)

und

$$e_\infty = \frac{1}{K_0} x_{e_1}$$

ermittelt.

Daraus ergibt sich:

$$e_\infty = \frac{1}{20} = \frac{1}{K_0} \cdot x_{e_1}$$

Somit beträgt die Kreisverstärkung

K_R=20

für

$$x_{e_1} \equiv w_1 = 1$$

6.2 Schritt 2 - Entwurf des Reglers

In diesem Schritt wird durch Einfügen geeigneter Übertragungsglieder die im vorigen Schritt ermittelte

Durchtrittsfrequenz ω_D und Phasenrand φ_R bei dem gewählten K_0 ermittelt. Der Regler wird dabei als ein reines P-Glied gewählt, um K_0 einzuhalten. Bei der Durchtrittsfrequenz ω_D fällt dabei die Amplitude $|G_0(j\omega)|dB$ mit etwa 20 dB/Dekade ab.
Die zusätzlichen Übertragungsglieder des Regelkreises werden in Reihenschaltung mit den übrigen Regelkreisgliedern angeordnet.

6.2.1 Lösung – Teil 1: Betrieb als reines P-Glied

$G_{R1}(s) = K_R = 20$, Darstellung des offenen Regelkreises mit der Übertragungsfunktion:

$$G_{O1}(s) = G_{R1}(s) \cdot G_s(s) = \frac{20}{s \cdot (1+s) \cdot (1+\frac{s}{3})} = \frac{20}{s + s^2 + \frac{s^2}{3} + \frac{s^3}{3}}$$

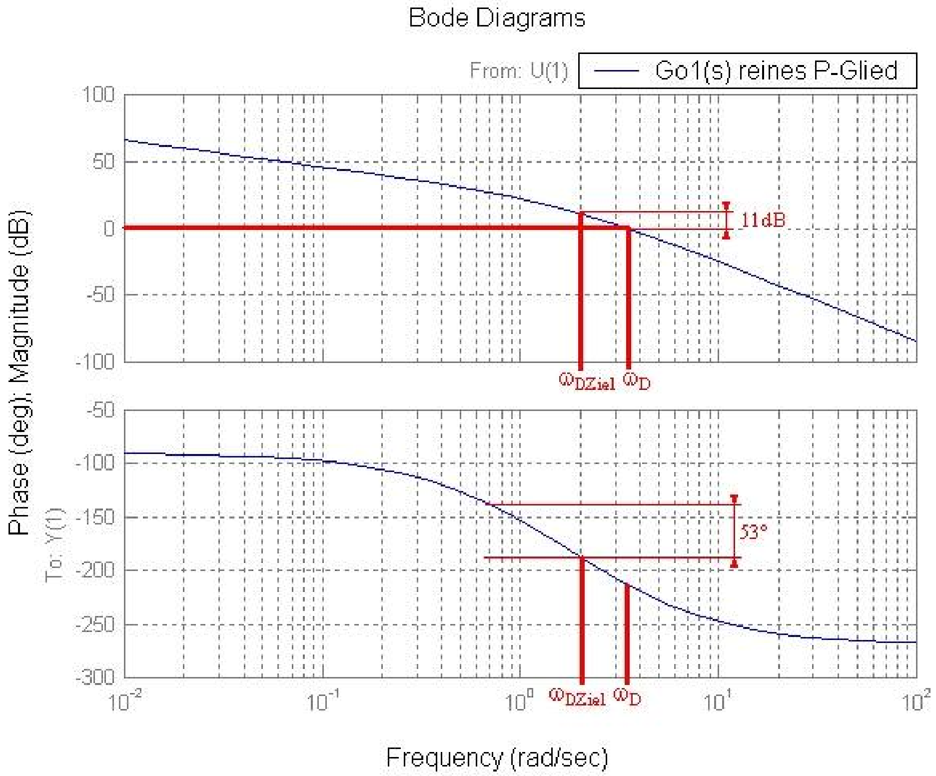


Abb.15 Betrieb des Reglers als reines P – Glied

Um die geforderten Kenndaten zu erfüllen

$$\varphi_{\omega DZiel} = -180° + \varphi_R = -180° + 45 = -135°$$
$$\varphi_R = 45°$$

müsste:

- die Phase von Go1(jω) bei $\omega = \omega_{DZiel}$ um 53 Grad erhöht werden und
- der Betrag von Go1(jω) bei $\omega = \omega_{DZiel}$ um 11 dB gesenkt werden

Um die erste Forderung zu erfüllen, erweitert man das P – Glied des Reglers um ein phasenanhebendes Übertragungsglied; bei der Durchtrittsfrequenz muss die Phasenverschiebung –135 Grad betragen, d.h.: eine Anhebung um 53 Grad ist erforderlich.

Um die zweite Forderung zu erfüllen, ist ein phasenabsenkendes Glied erforderlich, zusätzlich wird daher beim phasenanhebenden Glied eine Reserve von 6 Grad einbezogen (= unbeabsichtigte und nicht vermeidbare Phasenabsenkung durch das phasenabsenkende Übertragungsglied bei ω_{DZiel}).

6.2.2 Lösung – Teil 2: Das P-Glied wird um phasenanhebendes Glied erweitert

Es ist Aufgabe von phasenanhebenden Gliedern, einen guten Kompromiß zwischen dem erzielbaren Phasenwinkel und der akzeptierbaren Verstärkung des höherfrequenten Rauschens zu finden. Die Erfahrungen haben gezeigt, daß ein einzelnes Lead-Glied eine maximale Phasenanhebung von 60° erzeugen kann. Benötigt man eine größere Phasenanhebung, so müssen mehrere Lead-Glieder hintereinander geschaltet werden.

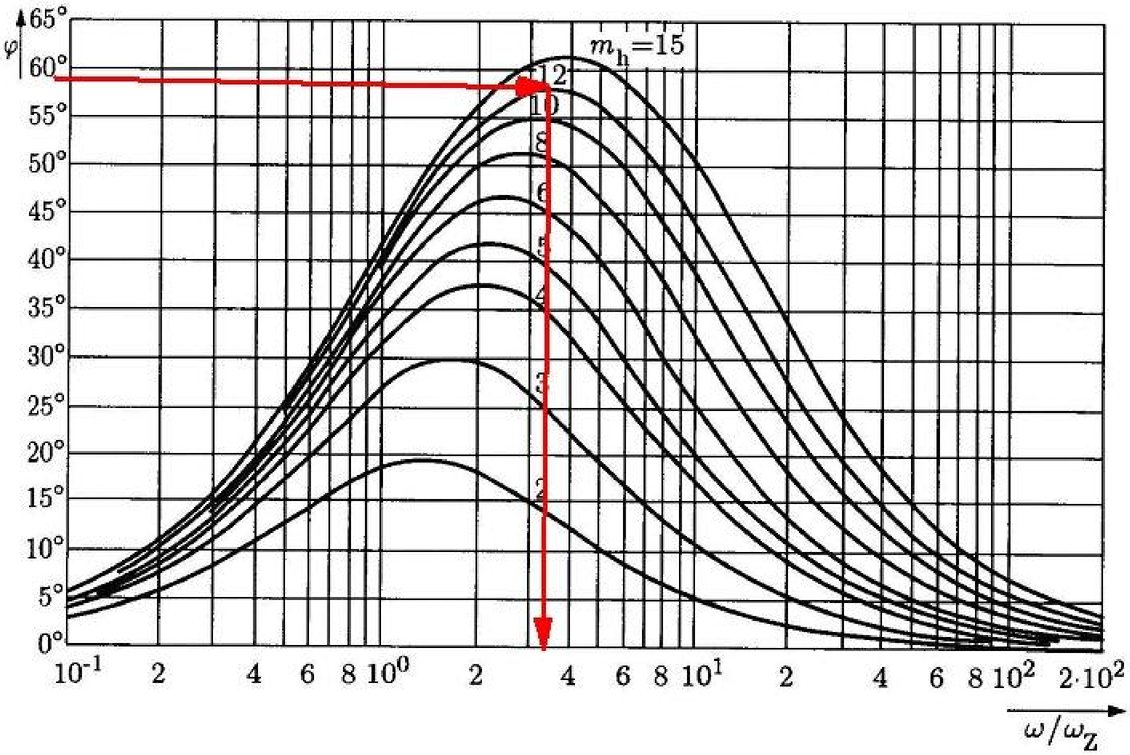


Abb.16 Phasenanhebung

Bestimmung der oberen und unteren Eckfrequenz

untere Eckfrequenz:

Ermittlung des Frequenzverhältnisses m_h aus obigem Diagramm bei einer Phasenanhebung von 59 Grad (53° des phasenanhebenden Gliedes + 6° Reserve) ≈ 12

$$\omega_Z = \frac{\omega_D}{\sqrt{m_h}} \approx 0{,}6 s^{-1}$$

obere Eckfrequenz:

$$\omega_N = \omega_Z \cdot m_h \approx 7{,}2 s^{-1}$$

Ermittlung der Übertragungsfunktion des phasenanhebenden Gliedes:

$$G_{R2}(j\omega) = K_O \cdot \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_Z}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_N}}$$

Ersetzen von s=jω

ergibt $G_{R2}(s) = 20 \cdot \dfrac{1 + \frac{s}{0{,}6}}{1 + \frac{s}{7{,}2}}$

Daraus ergibt sich die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises mit

$$G_{O2}(s) = G_{R2}(s) \cdot G_s(s) = 20 \cdot \frac{1 + \frac{s}{0{,}6}}{s \cdot (1+s) \cdot (1 + \frac{s}{3}) \cdot (1 + \frac{s}{7{,}2})}$$

Graphische Darstellung:

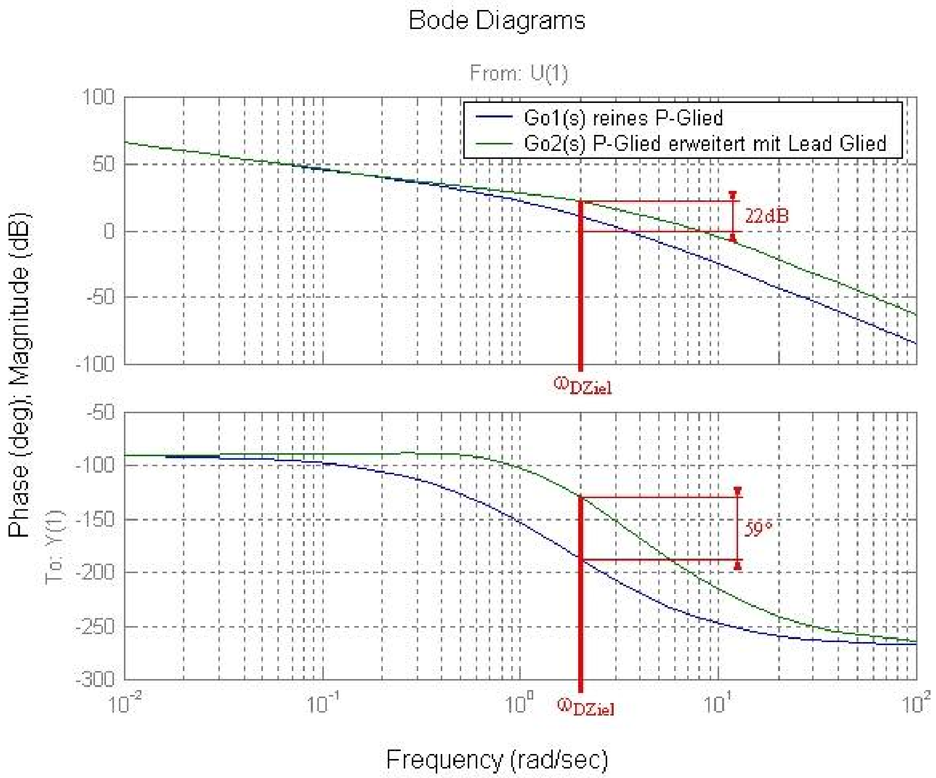


Abb.17 Betrieb des Reglers als P-Glied erweitert mit Lead-Glied

6.2.3 Lösung – Teil 3: Erweiterung des offenen Regelkreises um phasenabsenkendes Glied

Für viele Fälle ist es wichtig, die Bandbreite klein und die stationäre Regelabweichung gering zu halten bzw. die Amplitude bei hohen Frequenzen abzusenken. Hierfür ist es erforderlich, phasenabsenkende Übertragungsglieder in den Regelkreis zu integrieren.

Um eine Betragssenkung zu erhalten, erweitert man den offenen Regelkreis um ein phasenabsenkendes Übertragungsglied, so dass eine gewünschte Betragssenkung bezogen auf die Übertragungsfunktion der Strecke von 11 dB bei $\omega = \omega_{DZiel} = 2s^{-1}$ erreicht wird.
Durch das hinzugekommene phasenanhebende Übertragungsglied hat sich unbeabsichtigterweise auch die Betragskennlinie $G_{O2}(s)$ geändert. Es muss daher im nächsten Schritt die Betragskennlinie für
$\omega = \omega_{DZiel}$ nicht um 11 dB sondern um 22 dB abgesenkt werden.

Ermittlung des Frequenzverhältnisses m_s aus nachstehender Funktion:

$$20 \cdot \log(m_S) = 22dB \Rightarrow m_S = 10^{\frac{22}{20}} = 12{,}6$$

Mit $\varphi = -6°$ und $m_s = 12{,}6$ erhält man aus nachstehendem Phasendiagramm ein Verhältnis $\omega/\omega_N = 125$

ad b) Phasenabsenkung

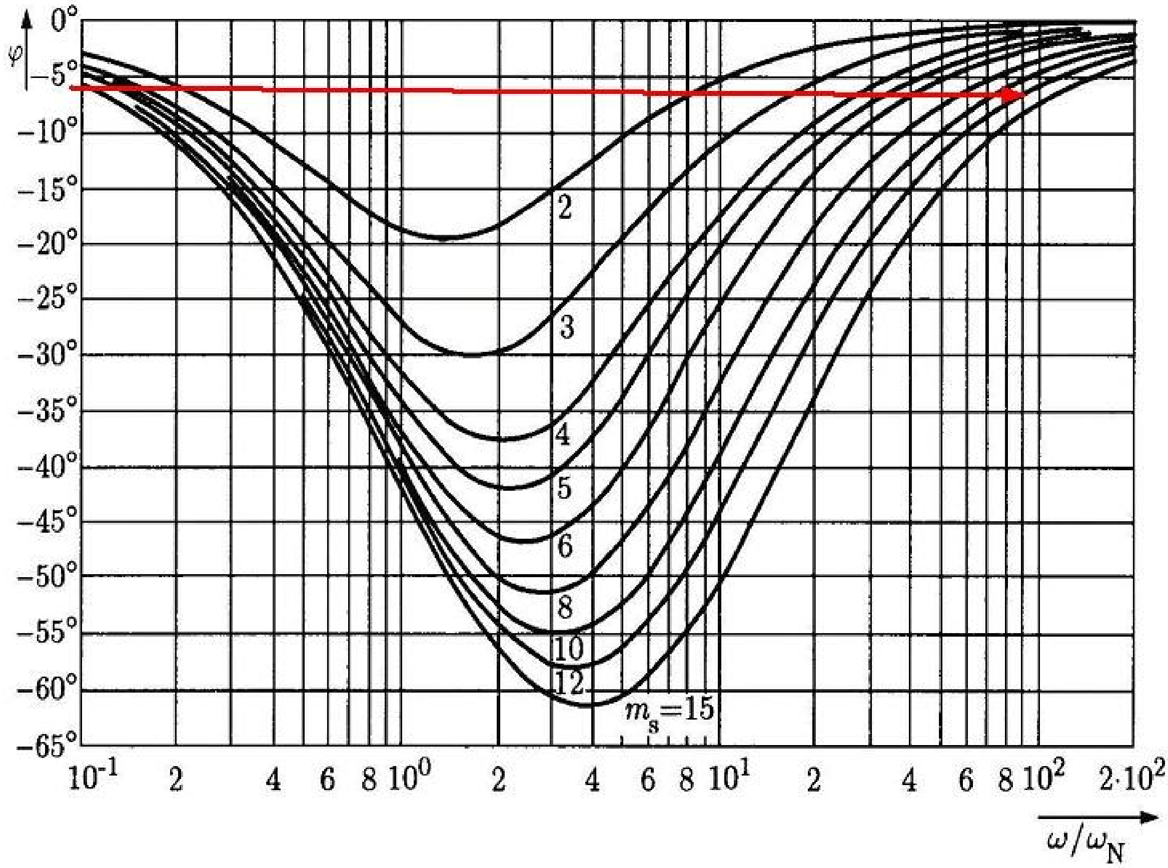


Abb.18 Phasenanhebung

Bestimmung der unteren und oberen Eckfrequenz für $\omega = \omega_{DZiel} = 2s^{-1}$

untere Eckfrequenz:

$$\omega_N = \frac{\omega_{DZiel}}{125} = \frac{2s^{-1}}{125} = 0{,}016s^{-1}$$

obere Eckfrequenz:

$$\omega_Z = \omega_N \cdot m_s = 0{,}016s^{-1} \cdot 12{,}6 = 0{,}2s^{-1}$$

ergibt $G_{R3}(s) = \dfrac{1+\dfrac{s}{0{,}2}}{1+\dfrac{s}{0{,}016}}$

Die Übertragungsfunktion des **endgültigen** Reglers ist damit gegeben durch:

$$G_R(j\omega) = G_{R2} \cdot G_{R3} = 20 \cdot \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{Z1}}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{N1}}} \cdot \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{Z2}}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{N2}}}$$

Ersetzen von s=jω sowie Einsetzen der ermittelten Werte ergibt

ergibt $G_R(s) = 20 \cdot \dfrac{1 + \dfrac{s}{0{,}6}}{1 + \dfrac{s}{7{,}2}} \cdot \dfrac{1 + \dfrac{s}{0{,}2}}{1 + \dfrac{s}{0{,}016}}$

Daraus ergibt sich die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises mit

$$G_O(s) = G_R(s) \cdot G_s(s) = 20 \cdot \frac{(1 + \dfrac{s}{0{,}2}) \cdot (1 + \dfrac{s}{0{,}6})}{s \cdot (1 + \dfrac{s}{0{,}016}) \cdot (1 + s) \cdot (1 + \dfrac{s}{3}) \cdot (1 + \dfrac{s}{7{,}2})}$$

Graphische Darstellung:

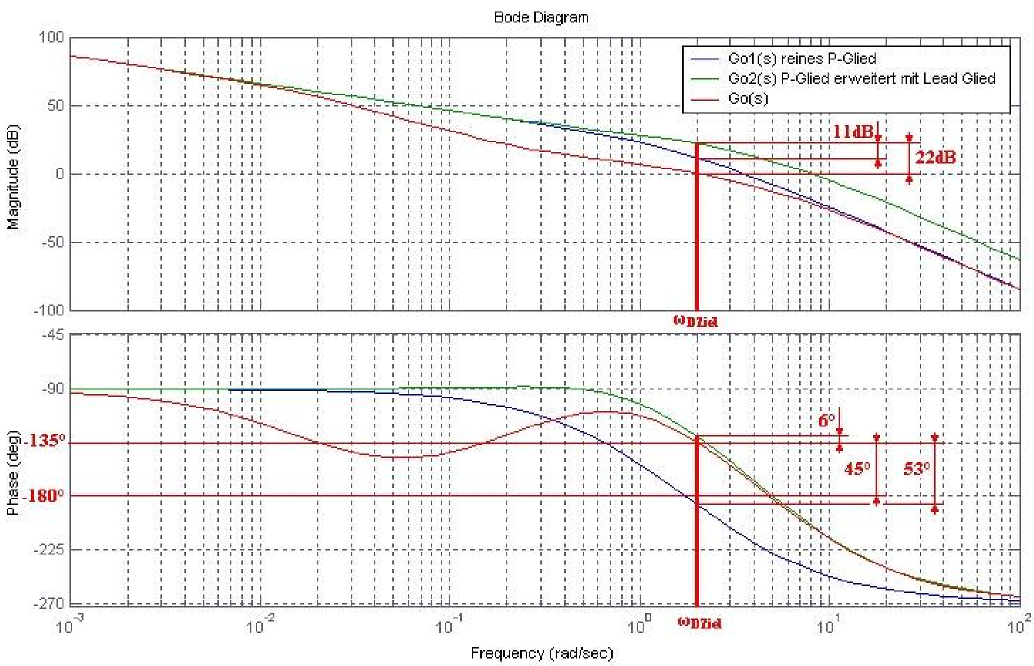


Abb.19 Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises

6.3 Schritt 2 – Überprüfung des ermittelten Ergebnisses

Die Überprüfung, ob das ermittelte Ergebnis tatsächlich den geforderten Spezifikationen entspricht, erfolgt entweder durch Rechnersimulation, bei der direkt die Ermittlung der Größen e_{max}, $T_{a,50}$ und e_∞ herangezogen wird, oder indirekt durch Berechnung der Amplitudenüberhöhung $A_{\omega max}$ und der Bandbreite ω_b, wobei diese Werte werden anhand der Frequenzkennlinien des geschlossenen Regelkreises überprüft:

$$G_W(j\omega) = \frac{G_O(j\omega)}{1 + G_O(j\omega)}$$

6.3.1 Lösung – Teil 1: Berechnung Amplitudenüberhöhung und Bandbreite

Berechnung der Amplitudenüberhöhung:

$$\mathrm{A}(\omega)_{\max} = \frac{1}{2 \cdot D \cdot \sqrt{1 - D^2}}$$

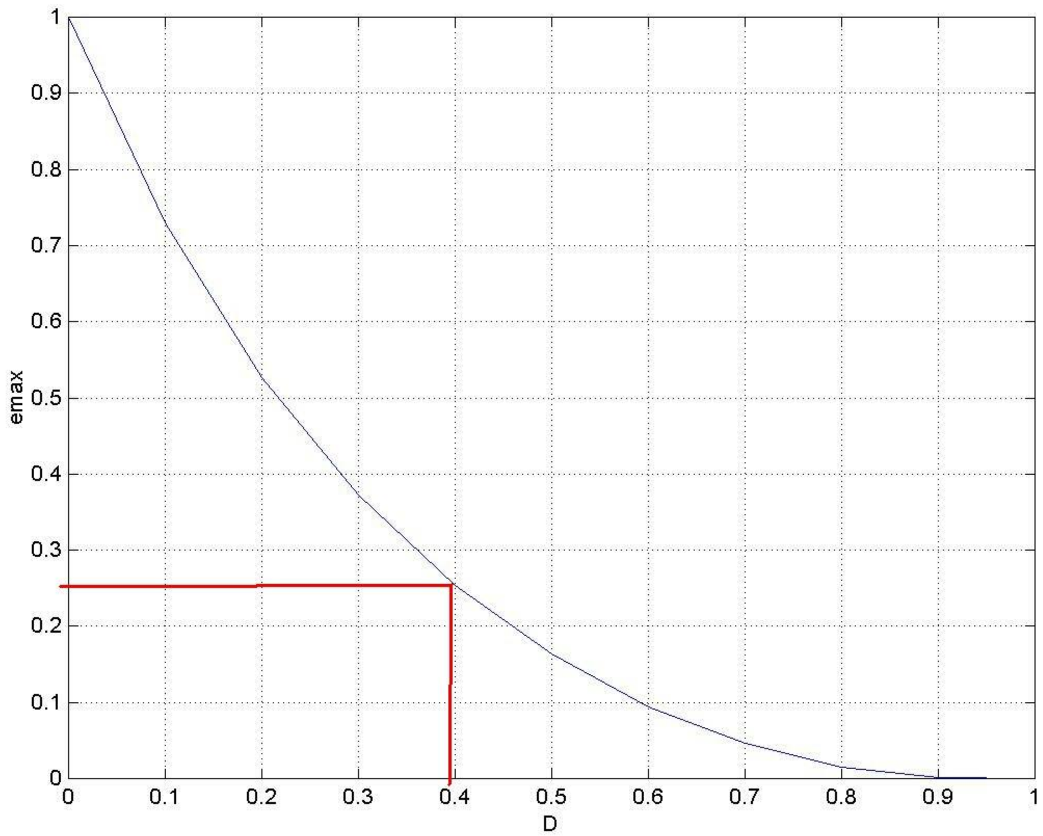


Abb.20 Überschwingweite als Funktion des Dämpfungsgrades

Bei gefordertem e_{max} (maximale Überschwingweite) von 25% ergibt sich aus der vorigen Graphik ein Dämpfungsgrad von 0.38.

Daraus folgt:

$$A(\omega)_{\max} = \frac{1}{2 \cdot 0.38 \cdot \sqrt{1 - 0.38^2}} = 1.4225$$

Durch Approximation der Abhängigkeit der Kenngröße $\omega_b \cdot T_{a,50}$ vom Dämpfungsgrad D des geschlossenen Regelkreises mit PT_2-Verhalten ist für

$0{,}3 < D < 0{,}8$

folgender Zusammenhang gegeben:

$\omega_b \cdot T_{a,50} \sim 2{,}3$

Die Bandbreite ist somit:

ω_b ~ 2,3 / Ta,50

ω_b ~ 2,3 / 0.7s = 3.286 s^-1

6.3.2 Lösung – Teil 2: Einsetzen der Frequenzkennlinien

Das Ergebnis der Berechnung wird durch Einsetzen der Werte des offenen Regelkreises:

$$G_O(s) = G_3(s) \cdot G_s(s) = 20 \cdot \frac{(1+\frac{s}{0,2}) \cdot (1+\frac{s}{0,6})}{s \cdot (1+\frac{s}{0,016}) \cdot (1+s) \cdot (1+\frac{s}{3}) \cdot (1+\frac{s}{7,2})}$$

in die Beziehung

$$G_W(j\omega) = \frac{G_O(j\omega)}{1+G_O(j\omega)}$$

und damit der Berechnung der Frequenzkennlinien des geschlossenen Regelkreises überprüft.

$$G_W(j\omega) = \left(20 \cdot \frac{(1+\frac{s}{0,2}) \cdot (1+\frac{s}{0,6})}{s \cdot (1+\frac{s}{0,016}) \cdot (1+s) \cdot (1+\frac{s}{3}) \cdot (1+\frac{s}{7,2})}\right) / \left(1+20 \cdot \frac{(1+\frac{s}{0,2}) \cdot (1+\frac{s}{0,6})}{s \cdot (1+\frac{s}{0,016}) \cdot (1+s) \cdot (1+\frac{s}{3}) \cdot (1+\frac{s}{7,2})}\right)$$

6.3.3 Graphisches Überprüfen des Ergebnisses

Ergebnis im Frequenzbereich:

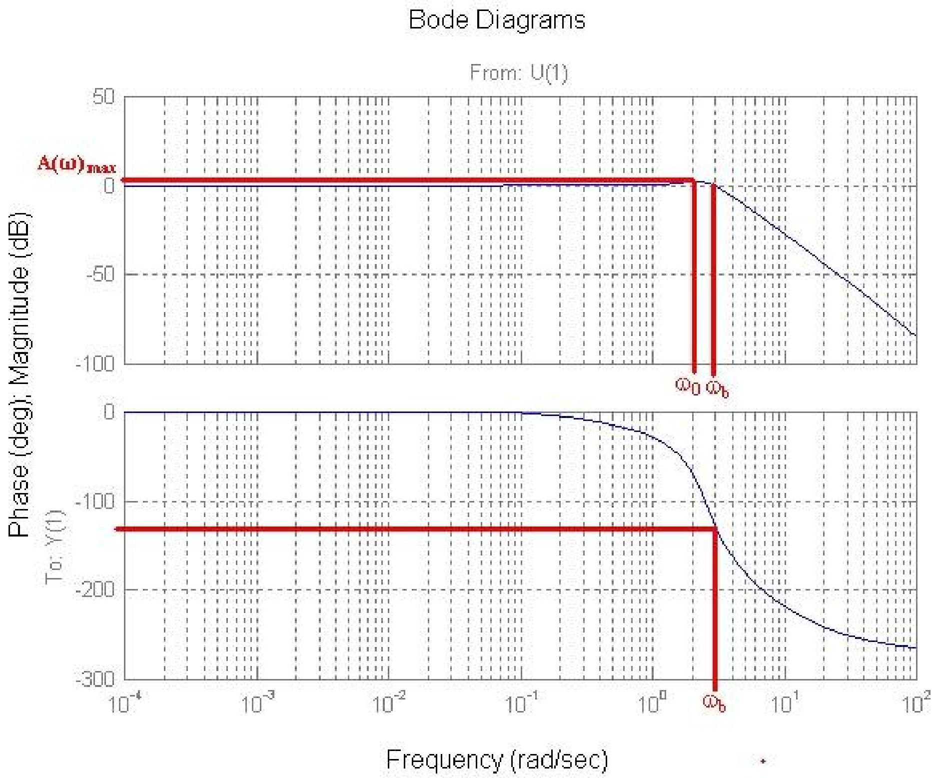


Abb.21 Bodediagramm des geschlossenen Regelkreises

Ermittelte Werte aus Diagramm:

$A(\omega)_{max}$ ~ 2,35dB → entspricht Forderung

ω_b ~ 3rad/sec → entspricht Forderung

Ergebnis im Zeitbereich:

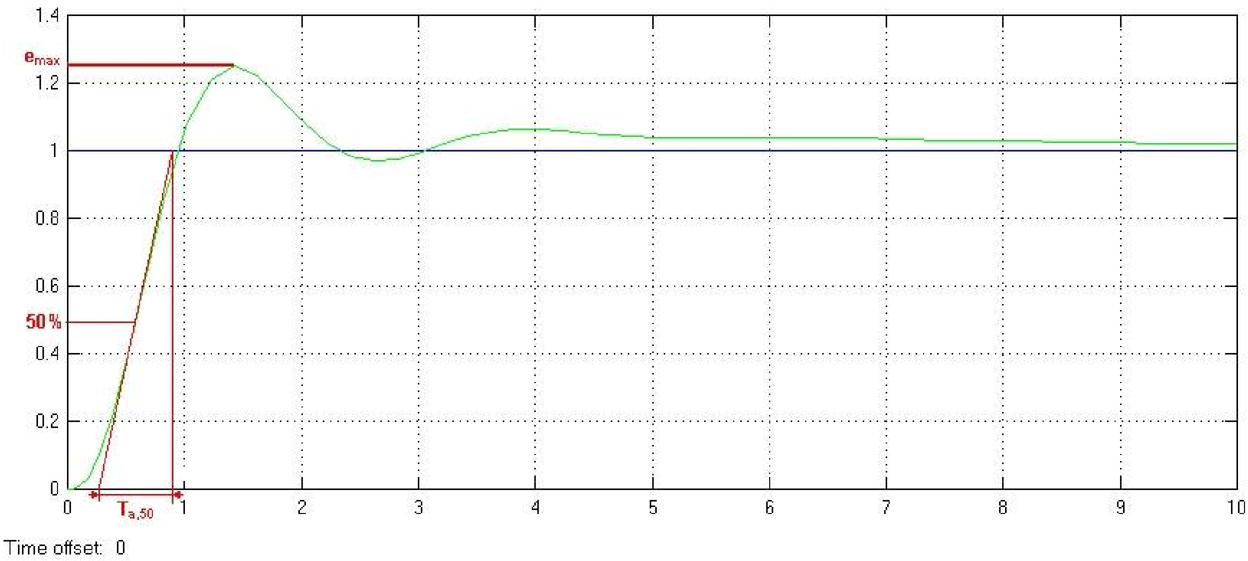


Abb.22 Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises

Ermittelte Werte aus Diagramm:

e_{max} ~ 25% → entspricht Forderung

$T_{a,50}$ ~ 0,7s → entspricht Forderung

Die aus den Diagrammen ermittelten Werte stimmen mit den Forderungen überein.

7 ÜBUNGEN

7.1 Beispiel eines Bodediagramms (Abbildung 1)

```
clear all;
close all;

bode (1, [1 1])
grid on;
```

7.2 Bodediagramm eines RC-Tiefpasses (Abbildung 3)

```
clear all;
close all;

bode (1, [1 1])
grid on;
```

7.3 Beispiel eines I-Gliedes (Abbildung 4)

```
clear all;
close all;
bode (1, [3 0])
grid on;
```

7.4 Beispiel eines PD-Gliedes (Abbildung 5)

```
clear all;
close all;

bode ([3 4],1)
grid on;
```

7.5 Summierung im Bodediagramm (Abbildung 6)

```
% Anzeige von 3 Kurven
% I-Glied "i"
% PD-Glief "pd"
% Summe aus I- und PD-Glied "pid"
% Die Kurven werden durch transfer-functions definiert (tf)

close all;
clear all;
i=tf(1, [3 0])
pd=tf([3 4],1)
pid = tf([3 4],[3 0])
bode(i,'g',pd,'b',pid,'r')
grid on;
legend ('I-Glied','PD-Glied','PID-Glied');
```

7.6 Beispiel eines Bodediagramms; Überschwingweite und Bandbreite (Abbildung 7)

```
clear all;
close all;

bode([1],[10 1 1])
grid on;
```

7.7 Eigenschaften im Zeitbereich; (Abbildung 8)

```
clear all;
close all;

w=sym(200);
D=sym(0.5);
Time=[0:0.002:0.5];
N=251;
D=sym(0.5);
for i = 1:N,
   t = Time(i);
       F(i) = eval(w^2*(1/w^2+1/(4*D^2*w^2-4*w^2)^(1/2)*(1/(-
D*w+1/2*(4*D^2*w^2-4*w^2)^(1/2))*exp((-D*w+1/2*(4*D^2*w^2-4*w^2)^(1/2))*t)-
1/(-D*w-1/2*(4*D^2*w^2-4*w^2)^(1/2))*exp((-D*w-1/2*(4*D^2*w^2-
4*w^2)^(1/2))*t))));
end;

plot(Time,F);
axis([0 0.1 0 1.2])
YLABEL('y(t)');
XLABEL('t');
legend('D=0.5, w=200')
grid on;
```

7.8 Maximale Überschwingweite (Abbildung 9)

```
clear all;
close all;

D=[0:0.1:1];
N=11;
for I = 1:N,
      emax(I)=exp(-(D(I)*pi)/sqrt(1-power(D(I),2)));
end;

plot(D, emax);
ylabel('emax');
xlabel('D');
```

7.9 Anstiegszeit (Abbildung 10)

```
clear all;
close all;
wt=0.9;
D=[0:0.1:0.9];
for i = 1:10,
      ta(i)=(sqrt(1-power(D(i),2))) / (exp(-D(i)*wt) * sin( sqrt(1-
power(D(i),2)) *wt));
end
plot(D,ta);
ylabel('w0ta,50');
xlabel('D');
```

7.10 Beispiel eines Bodediagramms; Phasenrand und Durchtrittsfrequenz (Abbildung 11)

```
clear all;
close all;

bode([100 100 10], [1 50 100 50 1 0])
grid on;
```

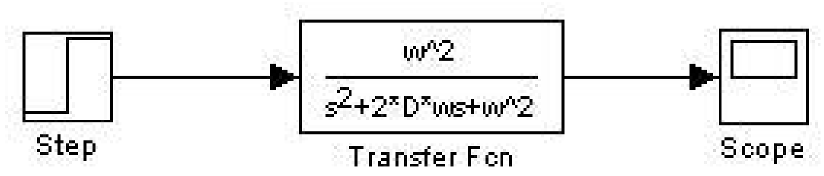
7.11 Berechnung der Übergangsfunktion im Zeitbereich; Möglichkeit 1: Manuell

```
close all;
clear all;

w=sym(100);
D=sym(0.9);

Time=[0:0.01:0.5];
N=51;
for i = 1:N,
   t = Time(i);
   %Händisch berechnet:
   FT(i) = eval(1-exp(-D*w*t)*(cos(w*sqrt(1-D^2)*t)+D/sqrt(1-
D^2)*sin(w*sqrt(1-D^2)*t)));
end;



subplot(1,2,1);
      plot(Time,FT);
      YLABEL('hw');
      XLABEL('w0t');

subplot(1,2,2);
      bar(0:1:1,[eval(D) 1],0.5);
      YLABEL('Dämpfung');
```

7.12 Berechnung der Übergangsfunktion im Zeitbereich; Möglichkeit 2: Inverse Laplace Transformation

```
Siehe: Berechnung der Übertragungsfunktion im Zeitbereich; Möglichkeit 1:
Manuell
Austausch von FT(i):

FT(i) = eval(w^2*(1/w^2+1/(4*D^2*w^2-4*w^2)^(1/2)*(1/(-D*w+1/2*(4*D^2*w^2-
4*w^2)^(1/2))*exp((-D*w+1/2*(4*D^2*w^2-4*w^2)^(1/2))*t)-1/(-D*w-
1/2*(4*D^2*w^2-4*w^2)^(1/2))*exp((-D*w-1/2*(4*D^2*w^2-4*w^2)^(1/2))*t))));
```

7.13 Berechnung der Übergangsfunktion im Zeitbereich; Möglichkeit 3: Simulink



7.14 Betrieb des Reglers als reines P-Glied (Abbildung 15)

```
clear all;
close all;

P1 = tf ([20], [1/3 4/3 1 0])
bode (P1)
legend ('Go1(s) reines P-Glied')
grid on;
```

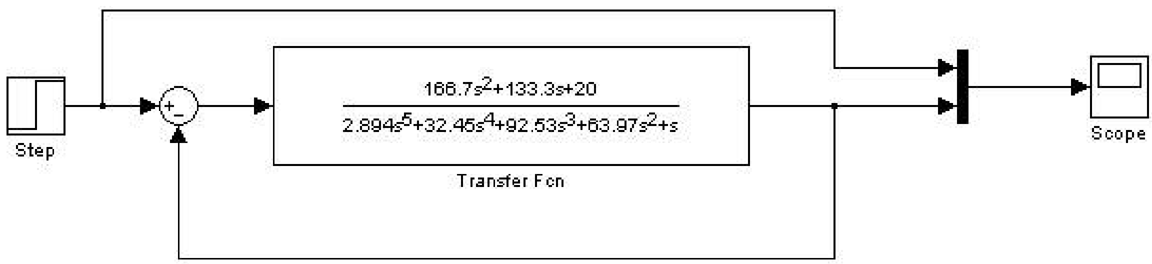
7.15 Betrieb des Reglers als P-Glied erweitert mit Lead-Glied (Abbildung 17)

```
clear all;
close all;
P1 = tf ([20], [1/3 4/3 1 0])
P2 = tf ([20/0.6 20], [1/21.6 11.2/21.6 31.8/21.6 1 0])

bode (P1, P2);
legend ('Go1(s) reines P-Glied', 'Go2(s) P-Glied erweitert mit Lead Glied',
0);
grid;grid on;
```

7.16 Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises (Abbildung 19)

```
clear all;
close all;

P1 = tf ([20], [1/3 4/3 1 0])
P2 = tf ([20/0.6 20], [1/21.6 11.2/21.6 31.8/21.6 1 0])
P3 = tf ([20/0.12 16/0.12 2.4/0.12], [1/0.3456 11.216/0.3456 31.9792/0.3456
22.1088/0.3456 1 0])

bode (P1, P2, P3)
legend ('Go1(s) reines P-Glied', 'Go2(s) P-Glied erweitert mit Lead
Glied','Go(s)')
grid on;
```

7.17 Bodediagramm des geschlossenen Regelkreises (Abbildung 21)



7.18 Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises (Abbildung 22)

```
clear all;
close all;

P1 = tf ([20], [1/3 4/3 1 0])
P2 = tf ([20/0.6 20], [1/21.6 11.2/21.6 31.8/21.6 1 0])
P3 = tf ([20/0.12 16/0.12 2.4/0.12], [1/0.3456 11.216/0.3456 31.9792/0.3456
22.1088/0.3456 1 0])
bode (P1, P2, P3)
legend ('Go1(s) reines P-Glied', 'Go2(s) P-Glied erweitert mit Lead
Glied','Go(s)')
grid on;
```